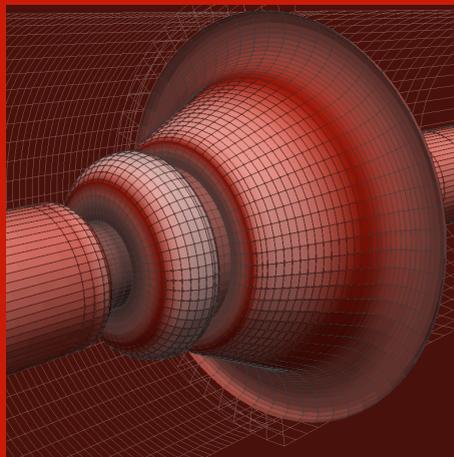
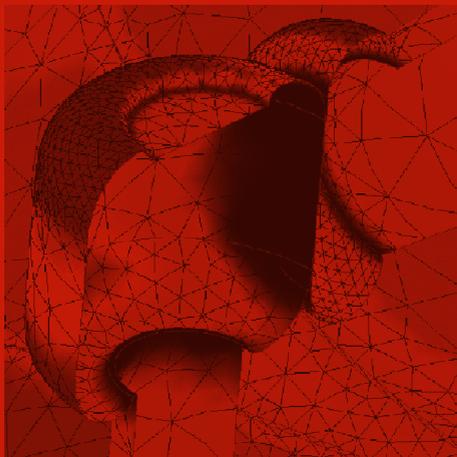
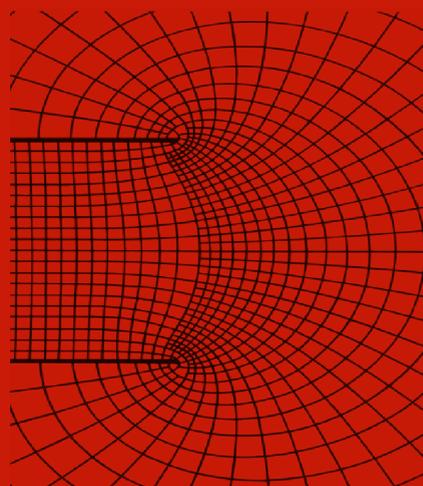
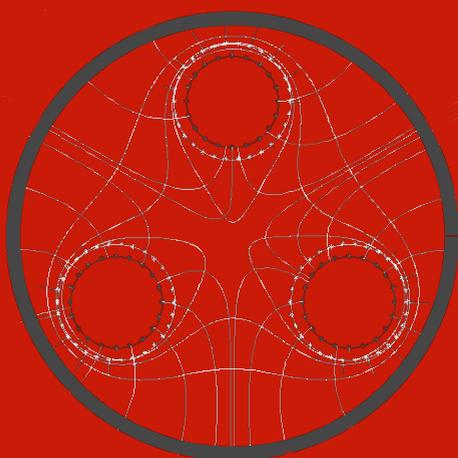


# Hochspannungsfelder

Frank Messerer



2. Auflage 2023

*Meinem hochverehrten Lehrer und Kollegen  
Prof. Dr.-Ing. habil. Hans Steinbigler gewidmet,  
Pionier der numerischen Feldberechnung.*



1934 - 2021

# 1 Elektromagnetische Feldtheorie

## 1.1 Grundlagen der Feldberechnung

Die Feldtheorie wurde im 19. Jahrhundert durch Mathematiker und Physiker wie Gauß, Laplace, Maxwell, Poisson, Coulomb und Ampere erforscht und entwickelt. Sie bildet die Grundlage für die Berechnung und Auslegung heutiger Hochspannungsanlagen.

Zunächst sollen einige grundsätzliche Begriffe und Größen betrachtet werden.

### Felder

Zur Beschreibung des Raumes werden geeignete Koordinatensysteme eingesetzt. Die geläufigsten davon sind:

- kartesische Koordinaten mit  $x, y, z$
- Kreiszyylinderkoordinaten mit  $r, \psi, z$
- Kugelkoordinaten mit  $r, \theta, \psi$

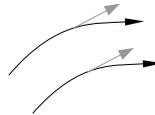
Jeder Punkt P im Raum ist damit hinsichtlich seines Ortes eindeutig beschrieben. Bei analytischen Berechnungen von Hochspannungsfeldern (siehe Kapitel 3.3) können auch andere, sehr spezielle Koordinatensysteme herangezogen werden.

Sind physikalische Größen den Punkten eines Raumes zugeordnet, d. h. ist der Raum von den Wirkungen dieser physikalischen Größen erfüllt, so nennt man diesen Raum ein **Feld** und die den Raumzustand beschreibende Größe eine **Feldgröße**.

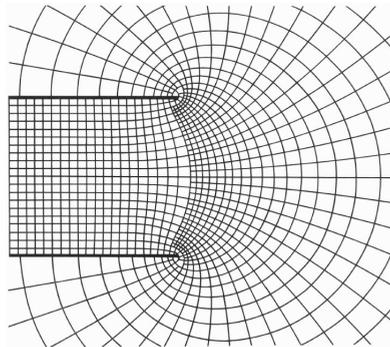
Ein **Feld** ist ein Zustand des Raumes, bei dem jedem Raumpunkt genau ein Wert einer physikalischen Größe, der sogenannten **Feldgröße**, zugeordnet werden kann.

Ist die Feldgröße ein **Skalar**, d. h. **eine ungerichtete Größe**, dann spricht man von einem **Skalarfeld**. Skalare Feldgrößen werden durch Maßzahl und Einheit dargestellt, z. B. Temperatur  $T = 273\text{K}$ . Beispiele für Skalarfelder sind Temperaturfelder, Druckfelder oder das elektrische Potentialfeld.

Ist die Feldgröße dagegen ein **Vektor**, d. h. **eine gerichtete Größe**, so handelt es sich um ein **Vektorfeld**. Beispiele: Kraftfeld, elektrisches Feld. Die Darstellung erfolgt durch **Feldlinien als Raumkurven**,



die so konstruiert sind, dass die **Feldvektoren** Tangenten an ihnen sind. Die Liniendichte wird proportional dem Betrag der Vektoren gewählt, d. h. **je dichter die Feldlinien, desto höher die Feldstärke**.



**Abbildung 1.1:** Randfeld eines Plattenkondensators

## Ursachen elektrischer Felder

Das elektrische Feld kann nicht durch die Sinne des Menschen erfasst werden. Es ist nur indirekt durch seine physikalischen Wirkungen nachzuweisen. Elektrische Felder haben zwei Ursachen:

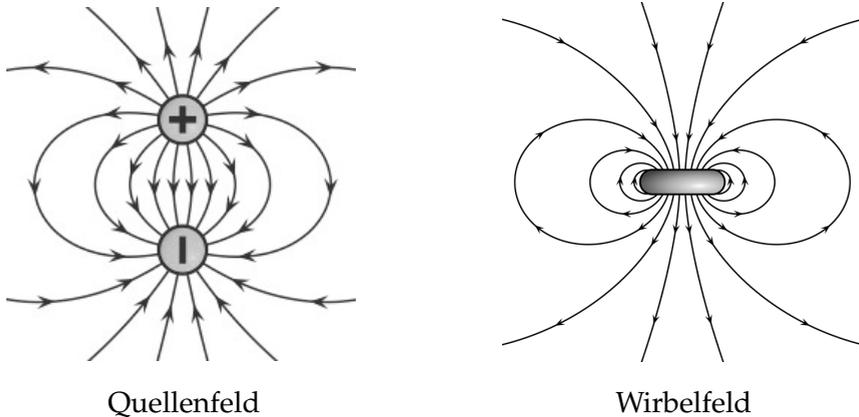


Abbildung 1.2: Ursachen elektrischer Felder

Betrachtet man das elektrostatische Quellenfeld, so kann man erkennen, dass Feldlinien auf positiven Ladungen beginnen und immer auf negativen Ladungen enden. Der Anfang ist die Quelle, das Ende entspricht einer Senke. Das Ende kann auch im Unendlichen liegen.

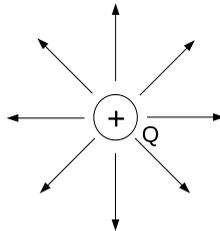


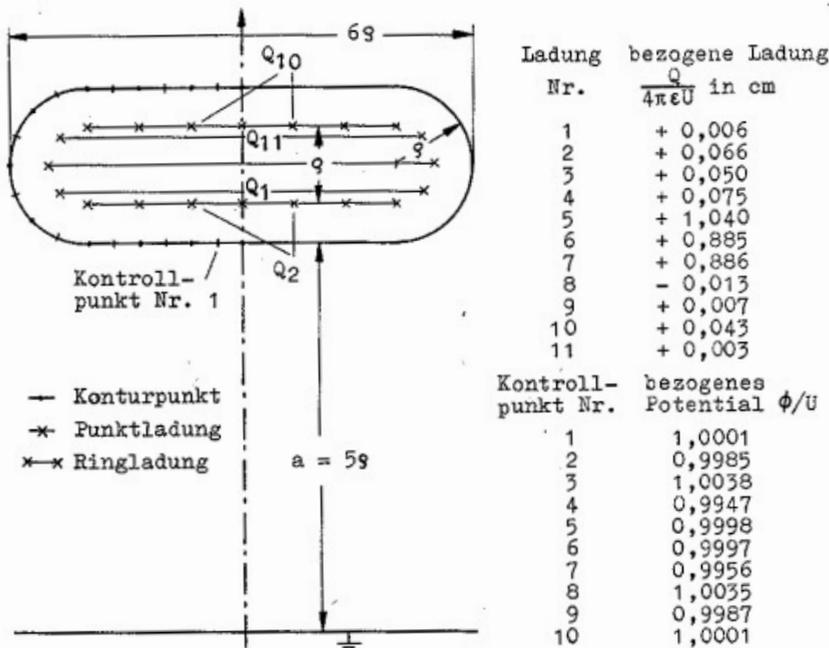
Abbildung 1.3: Quellenfeld mit Senke im Unendlichen

Elektrische Felder werden auch durch zeitlich veränderliche magnetische Felder induziert. Diese sog. *Wirbelfelder* treten z. B. innerhalb und außerhalb eines Transformatorschenkels auf. Die Feldlinien von Wirbelfeldern sind in sich geschlossen.

### 4.3 Ersatzladungsverfahren

#### Charge-Simulation-Method (CSM)

Das Ersatzladungsverfahren wurde von Prof. Dr.-Ing. habil. Hans Steinbigler am Lehrstuhl für Hochspannungs- und Anlagentechnik der TU München 1968 erfunden [43, 44] und in den folgenden Jahren [45] bis heute kontinuierlich weiterentwickelt [20]. Es wird erfolgreich in der Industrie und in Forschungseinrichtungen eingesetzt.



**Bild 8:** Beispiel Kreisscheibe-Ebene  
Berechnung durch Überlagerung der Felder  
von Punkt- und Ringladungen

Abbildung 4.16: Originalbeispiel aus der Dissertation Steinbigler

Die grundlegende Idee, nämlich der Ersatz der Oberflächenladung auf einem leitenden Körper durch fiktive Ladungen hinter der Oberfläche, geht auf die von Lord Kelvin [48] erstmals angegebene und von Maxwell [16] weiter ausgebauten *Methode der elektrischen Bilder (image method)* zurück.



Für das Potential in einem Aufpunkt A mit den Koordinaten  $r_i$  und  $z_i$  (siehe Abb. 4.18), herrührend von einer Punktladung, die auf der z-Achse angeordnet ist, gilt:

$$(\Phi_{ij})_1 = \frac{Q_{pj}}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_i^2 + (z_i - d_j)^2}} \quad (4.62)$$

Index i: Ordnungsnummer des Aufpunktes

Index j: Ordnungsnummer der Punktladung

Aus Symmetriegründen sind die Ladungen in der unteren Kugel betragsmäßig gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen:

$$Q_{pj1} = -Q_{pj2} = Q_{pj}$$

Für beiden Ladungen zusammen erhält man für das Potential:

$$\Phi_{ij} = (\Phi_{ij})_1 + (\Phi_{ij})_2$$

$$\Phi_{ij} = \frac{Q_{pj}}{4\pi\epsilon} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{r_i^2 + (z_i - d_j)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_i^2 + (z_i + d_j)^2}} \right] \quad (4.63)$$

Führt man den sogenannten **Potentialkoeffizienten**  $p_{ij}$  ein, gilt:

$$\Phi_{ij} = Q_{pj} \cdot p_{ij}$$

Man erhält insgesamt für  $n$  Ladungen:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n Q_{pj} \cdot p_{ij} \quad (4.64)$$

Bislang ist das unbekannte Potential im Aufpunkt  $A_i$  nicht berechenbar, da die Ersatzladungen nicht bestimmt sind. Deshalb muss man den Punkt so wählen, dass dessen Potential bekannt ist.

Befindet sich der Punkt  $A_i$  auf der Oberfläche der Kugel 1, so gilt:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n Q_{pj} \cdot p_{ij} = U$$

Der Punkt  $A_i$  wird im folgenden als **Konturpunkt** bezeichnet, d. h. als Punkt auf der Elektrodenkontur.

Wenn man nun  $n$  Konturpunkte auf der Kugeloberfläche anordnet, dann erhält man ein System von  $n$  linearen Gleichungen, wobei man aus Symmetriegründen nur die obere Kugel betrachten muss.

Man erhält schließlich das Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{p1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U \end{bmatrix}$$

$$[P] \cdot \{Q\} = \{U\} \quad (4.65)$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems führt auf die  $n$  unbekanntenen Ladungen. Somit kann sowohl das Potential als auch die Feldstärke jedes beliebigen Punktes im Feldraum mit Hilfe der Superposition der Ersatzladungen einfach bestimmt werden.

## Berechnung der Feldstärke

Die Feldstärke bestimmt sich durch die bekannte Ableitung:

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$\vec{E}(r_i, z_i) = - \sum_{j=1}^n \nabla p_j \cdot Q_j \quad (4.66)$$

## Weitere Ladungstypen

Diese Verfahrensweise, nur Punktladungen auf der Rotationsachse anzuordnen, ist sehr einfach. Genau so viele Ersatzladungen wie Konturpunkte. Dabei ist es nicht notwendig, dass die Kontur ein Kreis ist, sie kann beliebig geformt sein.

Die Methode, nämlich der Ersatz der Oberflächenladungen durch Punktladungen auf der Achse, könnte eine sehr allgemeine und einfache Simulationmethode für rotationssymmetrische Felder sein. Je höher die Anzahl von Konturpunkten und Ersatzladungen, desto höher die Genauigkeit.

Ein Problem kann sich jedoch bei speziellen Anordnungen ergeben:

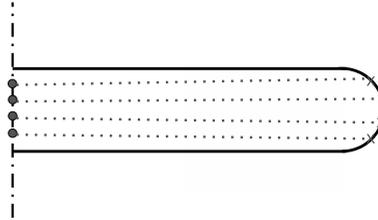


Abbildung 4.19: Problem mit Punktladungen

Bei der Beispielkontur hat man bei einer hohen Dichte von Ladungen und Konturpunkten praktisch die gleichen Distanzen zwischen den einzelnen Ladungen und den entsprechenden Konturpunkten. Zwei oder mehrere Gleichungen des Gleichungssystems sind damit nahezu gleich. Dies führt zu einem schlecht konditionierten Gleichungssystem, das vermieden werden sollte.

Die Lösung des Problems war die Einführung von ringförmigen Linienladungen, sogenannten **Ringladungen** für rotationssymmetrische Felder.

Darüber hinaus hat es sich als sinnvoll erwiesen, **Linienladungen** auf der Rotationsachse zu benutzen.

Das Ziel der Einführung der verschiedenen Ladungstypen war die Anpassung der Einhüllenden der Ladungen an die vorgegebene Kontur.

### Position der Ersatzladungen - Zuordnungsfaktor

Beim Ersatzladungsverfahren ist neben der Anzahl auch die Position der Ersatzladungen entscheidend für die Genauigkeit des Simulationsergebnisses. Der jeweilige Abstand zwischen den Konturpunkten und der Ersatzladung muss geeignet gewählt werden.

Hierzu wird ein sog. **Zuordnungsfaktor**  $f_n$  definiert. Dieser bestimmt sich aus dem Abstand zwischen zwei Konturpunkten und dem Abstand zwischen Konturpunkt und Ersatzladung.

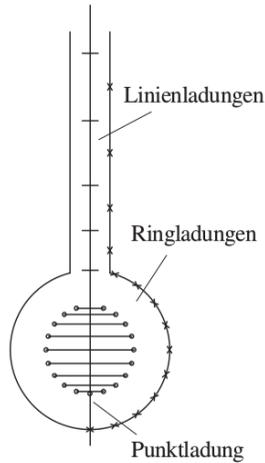
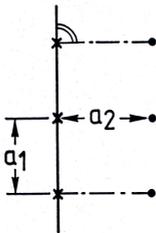


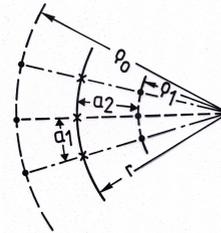
Abbildung 4.20: Kombination verschiedener Ladungstypen

Geradlinige Kontur:



$$f_a = \frac{a_2}{a_1}$$

Kreissegment:



$$\rho_{1/0} = r \cdot \left[ \sqrt{1 + \left( f_a \cdot \frac{a_1}{r} \right)^2} \mp f_a \cdot \frac{a_1}{r} \right]$$

$\rho_1$  für konvexe,  $\rho_0$  für konkave Kurven

Die Erfahrung beim Ersatzladungsverfahren hat gezeigt, dass der Zuordnungsfaktor  $f_a$  zwischen 1 und 2 liegen sollte.

Ist  $f_a$  zu hoch, ergibt sich ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem, ist  $f_a$  zu niedrig, gibt es stärkere Abweichungen zwischen dem Verlauf der Äquipotentiallinien und der Kontur.

Die **Grundidee** beim CSM ist der Ersatz der tatsächlichen Oberflächenladungen durch ein geeignetes System von diskreten Punkt-, Ring- und Linienladungen ggfs. auch von Flächenladungen.

Die Wahl der Konturpunkte und Ladungsarten sind frei wählbar, hier spielt die Erfahrung eine wichtige Rolle in ähnlicher Weise wie bei der Gittereinteilung bei der FEM und FDM.

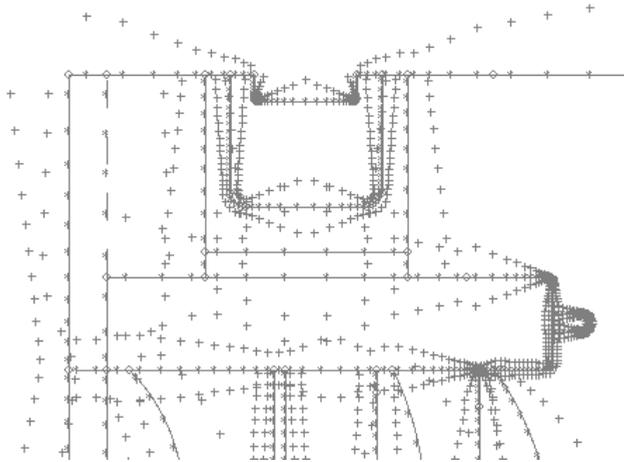


Abbildung 4.21: Position der Ersatzladungen

In der Regel wird der Zuordnungsfaktor mit  $f_a = 1,5$  angegeben. Das am Lehrstuhl mit langer Erfahrung entwickelte CSM-Simulationsprogramm **ELFI** ordnet die Ladungen automatisch mit Hilfe des Zuordnungsfaktors an und kann die Ladungspositionen selbstständig optimieren.

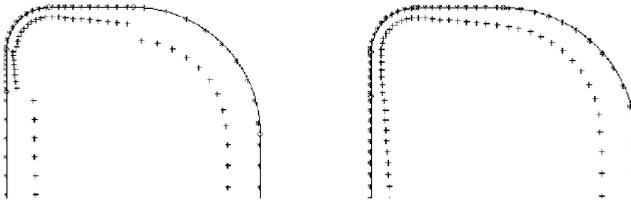


Abbildung 4.22: Optimierung der Diskretisierung mit Hilfe des Zuordnungsfaktors und Verdichtungsfaktor

In Randbereichen und bei kleinen Radien sollte aber die Positionierung ggfs. manuell angepasst werden.

Außerdem kann die Diskretisierung mit Hilfe eines Verdichtungsfaktors, der die Ladungen zu einem Ende des Elements hin verdichtet, weiter optimiert werden.

# Hochspannungsfelder

Prof. Dr.-Ing. Frank Messerer  
Honorarprofessor für Elektrische Felder in der Energietechnik  
Technische Universität München  
2. Auflage 2023

